

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις – Φυλλάδιο Ασκήσεων 4

Άσκηση 1. Καταλλήξτε στον τύπο του d'Alembert αλλάζοντας μεταβλητές $\xi = t + x$, $\eta = t - x$ στην εξίσωση $u_{tt} - u_{xx} = f$.

Άσκηση 2. Έστω το ΠΑΤ

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{στο } \mathbb{R} \times [0, +\infty) \\ u(x, 0) = h(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad (*)$$

με h, g άρτιες συναρτήσεις. Δείξτε ότι η λύση $u(\cdot, t)$ είναι άρτια ως προς x , για κάθε $t > 0$. Μελετήστε το ανάλογο πρόβλημα για h, g περιττές συναρτήσεις.

Άσκηση 3. Να λυθεί το ΠΑΤ

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xt} + u_{xx} = 0 & \text{στο } \mathbb{R} \times [0, +\infty) \\ u(x, 0) = h(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Άσκηση 4. Θεωρήστε τη λύση του ΠΑΤ (*) με αρχικές συνθήκες $g = 0$ και h να έχει συμπαγή φορέα. Βρείτε που μηδενίζεται η λύση u .

Άσκηση 5. Έστω το συνοριακό πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{στο } [0, +\infty) \times [0, +\infty) \\ u(x, 0) = h, \quad u_t(x, 0) = g & \text{για κάθε } x \geq 0 \\ u_x(0, t) = 0 & \text{για κάθε } t \geq 0 \end{cases}$$

Η τελευταία σχέση λέγεται συνοριακή συνθήκη Neumann. Δείξτε ότι αναγκαίες συνθήκες συμβατότητας για το παραπάνω πρόβλημα είναι οι $h'(0) = g'(0) = 0$. Δείξτε επίσης την μοναδικότητα λύσεων.

Άσκηση 6. Θεωρήστε το συνοριακό πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x, t) & \text{στο } [0, \ell] \times [0, +\infty) \\ u(x, 0) = h(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) & \text{για κάθε } x \in [0, \ell] \\ u_x(0, t) - 2u_t(0, t) = r(t), \quad u_x(\ell, t) + 3u_t(\ell, t) = p(t) & \text{για κάθε } t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Δείξτε την μοναδικότητα λύσεων.

Άσκηση 7. Βρείτε τη λύση του συνοριακού προβλήματος

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{στο } [0, 1] \times [0, +\infty) \\ u(x, 0) = \sin(5\pi x) + 2\sin(7\pi x), \quad u_t(x, 0) = 0 & \text{για κάθε } x \in [0, 1] \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{για κάθε } t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

χρησιμοποιώντας την μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών.